مبادئ في المنطق

تقديم:

يلجأ كل فرد منا في حياته اليومية إلى الدفاع عن قناعته و آرائه التي يتمسك بها، ومن أجل ذلك نجده مجبرا على التفكير و المقارنة والافتراض والتحليل واصدار أحكام، وعموما فإنه يلجأ إلى جميع المواقف إلى تبني الإستدلال المناسب للدفاع عن تلك القناعات و الآراء الشخصية، كما هو الأمر مثلا عند لاعب الشطرنج.ومن هذا المنطلق سنتطرق في بعض فقرات هذا الدرس إلى أنواع الإستدلالات الرياضية، لأن من بين أسباب الفشل الدراسي في الرياضيات عجز التلاميذ عن التمكن من القدرة على الإستدلال الصحيح وفقرهم إلى أدوات البحث.

I. العبارات-العمليات على العبارات:

1) العبارات

نشاط: صحيح أم خطأ:

P1: "الرباط هي عاصمة المملكة المغربية" V

P2: "يبلغ عدد سكان المغرب 100 مليون نسمة سنة 2006 " F

P3: " 8*4=32 " V

P4: "العدد 17 عدد أولي " V

تعريف: نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا.

أمثلة:

- العبارة " 6*4=20" خاطئة.
- العبارة " مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي" صحيحة .
- العبارة " $\sqrt{2} \in Q$" خاطئة .

ملحوظة: لا يمكن أن تكون عبارة صحيحة وخاطئة في نفس الوقت أوغير صحيحة وغير خاطئة.

2) العمليات على العبارات:

1-2) نفي عبارة :

نشاط: في حوار جرى بين فاطمة و أحمد أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد وكل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة.

انقل الجدول التالي إلى دفترك ثم املأه:

ما قالته فاطمة	ما قاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2} \in IN$	$\sqrt{2} \notin IN$	خاطئ	صحيح
$7+2 \geq 5$	$7+2<5$	صحيح	خاطئ
16 مضاعف للعدد 4	16 غير مضاعف للعدد 4	صحيح	خاطئ
$(-2)^2 \neq 4$	$(-2)^2 = 4$	خاطئ	صحيح

تعريف: نفي عبارة P هي العبارة التي نحصل عليها انطلاقا من P ونرمز لها بالرمز $\overline{P}$ (و تقرأ نفي P). وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة، وتكون صحيحة إذا كانت P خاطئة.

ملاحظة: لتكن P عبارة. نعبر عن قيمة حقيقية عبارة P باستعمال جدول نسميه جدول الحقيقة.

- P إما تكون عبارة صحيحة. وفي هذه الحالة يرمز لها بالرمز V أو العدد 1.
- و إما تكون خاطئة فيرمز لها بالرمز F أو 0.

P
V
F

أو

P
1
0

مثال:

- نفي العبارة " $3*3=9$" هي العبارة "$3*3 \neq 9$"
- نفي العبارة " $x^2<0$" هي العبارة "$x^2 \geq 0$"
- نفي العبارة " $\sqrt{3} \in IN$" هي العبارة "$\sqrt{3} \notin IN$"

جدول حقيقة نفي عبارة:

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

2-2) عطف عبارتين:

تعريف:

عطف عبارتين P و Q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز (P و Q) أو $(P \wedge Q)$ و التي تكون صحيحة فقط اذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا.

أمثلة:

- العبارة "$5 \in IN$ و $5*1=5$ " عبارة صحيحة .
- العبارة "$4^2=8$ و $\sqrt{4}=-2$ عبارة خاطئة .
- العبارة "$5*5=25$ و $2<4$ " عبارة خاطئة .

جدول حقيقة عطف عبارتين:

P	Q	P و Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

تطبيق: أدرس صحة العبارات التالية:

- ✓ " 13 عدد فردي و $14<15$ " F
- ✓ " 6 عدد زوجي و 6 يقسم 22 " F
- ✓ "$\prod \notin Q$ و $2=(\sqrt{2})^2$ " V

3-2) فصل عبارتين:

تعريف: فصل عبارتين P و Q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان P و Q خاطئتين مع و نركز لها بالرمز (P أو Q) أو بالرمز $(P \vee Q)$

أمثلة:

- العبارة "$\frac{5}{2}=2.5$ أو $2 \neq 3$ " عبارة صحيحة .
- العبارة "$13<5$ أو $4-10=6$" عبارة صحيحة .
- العبارة "$3^3=27$ أو $\frac{5}{3}>1$ " عبارة صحيحة .
- العبارة " 17 عدد زوجي أو $5=3*2$" عبارة خاطئة .

جدول حقيقة فصل عبارتين:

P	Q	P أو Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

تطبيق: ادرس صحة العبارات التالية:

- ✓ "$14>2$ أو $4=5$ " V
- ✓ "$4+4=9$ أو $8^2+1>0$ " V
- ✓ "$4^2=3^2$ أو $5^2=24$ " F

4-2) استلزام عبارتين:

تعريف: استلزام عبارتين P و Qهو العبارة التي تكون خاطئة فقط اذا كانت P صحيحة و Q خاطئة ونرمز لها بالرمز $(P => Q)$.

أمثلة:

- ✓ الإستلزام " $3<5 => (-1)^2=1$" V
- ✓ الإستلزام " $3^2=-9 => 4<2$ " V
- ✓ الإستلزام " 5 عدد فردي $=> 2^2=-4$ " F

جدول حقيقة استلزام عبارتين:

P	Q	P => Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ملاحظة:

- العبارتان $P => Q$ و $Q => P$ مختلفتان.
- الإستلزام $Q => P$ يسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $P => Q$
- العبارة $P => Q$ تقرأ: "P تستلزم Q" أو إذا كان P فإن Q.

تطبيق:

ادرس صحة الإستلزام:" $(x=5$ و $y=6) => 2x+3y=28$ " V

5-2) تكافؤ عبارتين:

تعريف: تكافؤ عبارتين P و Q هو العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان P و Q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. ونرمز لها بالرمز $(P <=> Q)$

العبارة $(P <=> Q)$ تقرأ : " P تكافئ Q" أو "P إذا وفقط إذا كان Q " أو " P شرط لازم وكاف لكي تكون Q".

أمثلة:

- التكافؤ: "$(4 \in IN <=> 8 \geq 3)$" صحيح.
- التكافؤ: "(5 عدد فردي $<=> \sqrt{5} \in IN$)" خاطئ.
- التكافؤ: "$(x=1 <=> x+1=2)$" صحيح.

جدول حقيقة تكافؤ عبارتين:

P	Q	P <=> Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

تطبيق: (5 قاسم 1085 $<=>$ 5 عدد أولي) V

II. الدالة العبارية-المكممات:

1) الدالة العبارية:

تعريف:

الدالة العبارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هذه المجموعة.

مثال:

- " $(x \in IR); x^2-1=0$ " دالة عبارية. من أجل x=-1 و x=1 هي عبارة صحيحة وما عدا ذلك فهي عبارة خاطئة.
- " $(x \in IR^+); \sqrt{x}=2$ " دالة عبارية . من أجل x=4 هي عبارة صحيحة و من أجل $x \neq 4$ هي عبارة خاطئة.

2) المكممات:

لتكن P(x) دالة عبارية للمتغير x من E.

- انطلاقا من P(x) نكون العبارة " $(\exists x \in E); P(x)$" و التي تكون صحيحة فقط إذا وجد على الأقل عنصر من E يحقق الخاصية P(x).
  الرمز "$\exists$" يسمى المكمم الوجودي. العبارة "$(\exists x \in E); P(x)$" تقرأ " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية P(x) .
- انطلاقا من P(x) نكون العبارة " $(\forall x \in E); P(x)$" و التي تكون صحيحة فقط إذاكانت جميع عناصر المجموعة تحقق الخاصية P(x).
  الرمز "$\forall$" يسمى المكمم الكوني. العبارة "$(\forall x \in E); P(x)$" تقرأ " مهما يكن x من E لدينا P(x) " أو " لكل عنصر x من E لدينا P(x) "

أمثلة:

- مهما يكن x من IR، فإن $x^2 \geq 0$ ، وبالتالي نكتب: "$(\forall x \in E); x^2 \geq 0$"
- العبارة " $(\exists x \in IR); x^2+1=0$ " عبارة خاطئة.

3) نفي عبارة مكممة:

- نفي العبارة "$(\forall x \in E); P(x)$" هو العبارة "$(\exists x \in E); \overline{P(x)}$"
- نفي العبارة "$(\exists x \in E); P(x)$" هو العبارة "$(\forall x \in E); \overline{P(x)}$"

أمثلة:

- نفي العبارة "$(\forall x \in E); x^2+1>0$" هو العبارة "$(\exists x \in E); x^2+1 \leq 0$"
- نفي العبارة "$(\exists x \in E); x+1=0$" هو العبارة "$(\forall x \in E); x+1 \neq 0$"

III. الاستدلالات الرياضية:

يعتمد الاستدلال الرياضي على بعض المبادئ والقواعد الأساسية كما ترتكز البرهنة على صحة عبارة على القواعد و الخاصيات و المبرهنات التي سبق أن بيناها أو قبلنا صحتها وكذلك على التعاريف والاصطلاحات المتفق عليها و على القواعد المنطقية.

1- الاستدلال بالتكافؤ:

للبرهنة على أن عبارة P تكافئ عبارة Q نظطر أحيانا لاستعمال عبارة أخرى R فنبين أن : $P <=> R$ و $R <=> Q$

ثم نستنتج أن $P <=> Q$

مثال: a عدد حقيقي، لنبين أن : $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2} <=> 2a \leq 1+a^2 <=> a^2-2a+1 \geq 0 <=> (a-1)^2 \geq 0$

وبما أن العبارة $(a-1)^2 \geq 0$ صحيحة وتكافئ العبارة $a^2-2a+1 \geq 0$ فإن $\frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}$

2-الاستدلال بفصل الحالات:

للبرهنة على أن العبارة (P أو Q) تستلزم العبارة R، نبين أن $P => Q$ صحيحة و أن $Q => R$ صحيحة كذلك، ثم نستنتج أن (P أو Q) $=> R$

ملاحظة:

عمليا غالبا ما تكون العبارة Q هي العبارة $\overline{P}$، ولكي نبين أن (P أو $\overline{P}$) $=> R$

يكفي أن نبين أن $P => R$ وأن $\overline{P} => R$

مثال: حل في IR المعادلة : $x^2-|x+1|+1=0$

- اذا كان $x \geq -1$ فإن المعادلة تصبح $x^2-x=0$ اذن x=0 أو x=1
- اذا كان $x<-1$ فإن المعادلة تصبح $x^2+x+2=0$ وبالتالي $\Delta<0$ وفي هذه الحالة ليس لها حل.

3- الاستدلال بالخلف:

للبرهنة على أن عبارة Q هي عبارة صحيحة نتبع الخطوات التالية:

- نفترض أن العبارة Q خاطئة.
- نستنتج بناءعلى هذا الافتراض وعلى المعطيات والخاصيات الرياضية أن عبارة P ونفيها $\overline{P}$ عبارتان صحيحتان معا وهذا غير مقبول.
- نستنتج أن العبارة Q صحيحة.

مثال: أثبت أن العبارة "$(\forall x \in E); x^2+1 \neq 0$" صحيحة

نفترض أنها خاطئة أي $(\exists x \in E); x^2+1=0$ عبارة صحيحة ، اذن $\Delta<0$، هذا يعني أنه لا يوجد أي عدد حقيقي x يحقق المعادلة $x^2+1=0$ وبالتالي فهناك تناقض.

ومنه فإن "$(\forall x \in E); x^2+1 \neq 0$" صحيحة

الإشتقاق

ذ.بدر بوصفيحة	الاشتقاق	أولى آدبم	ثانوية تمسمان التأهيلية

تـمـهـيـد : لتحديد رتابة الدالة f نستعمل دالة تسمى الدالة المشتقة للدالة f و نرمز لها بالرمز f'

I. تحديد الدالة المشتقة لدالة عددية:

1. الدالة الحدودية:

قاعدة:
لتكن f دالة عددية و k عدد حقيقي معلوم.
إذا كانت $f(x) = a$ فإن $f'(x) = 0$
إذا كان $f(x) = ax$ فإن $f'(x) = a$
إذا كان $f(x) = ax^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي فإن $f'(x) = anx^{n-1}$

أمثلة:
إذا كانت $f(x) = -2$ فإن $f'(x) = 0$
إذا كانت $f(x) = 4x$ فإن $f'(x) = 4$
إذا كانت $f(x) = 5x^3$ فإن $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.
إذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1$ فإن $f'(x) = 3x^2 - 4 \times 2x^1 + 1 + 0$
$= 3x^2 - 8x + 1$.

تمرين تطبيقي:
احسب الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية:
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.
$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

قاعدة: لتكن g و f دالتان.
$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

مثال1:
نعتبر الدالة f حيث $f(x) = (x^2+1)(x-1)$
$f'(x) = (x^2+1)'(x-1) + (x^2+1)(x-1)'$
$= 2x(x-1) + (x^2+1)$
$= 2x^2 - 2x + x^2 + 1$
$= 3x^2 - 2x + 1$.

مثال2: حدد الدالة المشتقة للدالة f حيث
$f(x) = (x+1)(3x-3)$.

2. الدالة الجذرية :

قاعدة: لتكن g و f دالتان حيث $g(x) \neq 0$ لكل x من D_g
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

مثال:
$\left(\frac{2x-1}{3x+4}\right)' = \frac{(2x-1)'(3x+4) - (2x-1)(3x+4)'}{(3x+4)^2}$.
$= \frac{2(3x+4) - (2x-1)3}{(3x+4)^2} = \frac{6x+8-6x+3}{(3x+4)^2}$.
$= \frac{11}{(3x+4)^2}$

تمرين تطبيقي:
احسب الدالة المشتقة للدالة في الحالات التالية
$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$; $f(x) = \frac{7}{x+2}$;
$f(x) = \frac{5x-3}{2x+2}$.

II. تطبيقات:

1. رتابة دالة:

قاعدة: إذا كان $f'(x) \geq 0$ لكل x من مجال I فإن f تزايدية على I
إذا كان $f'(x) \leq 0$ لكل x من مجال I فإن f تناقصية على I.

مثال1: نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^2 - 2x + 1$
1. احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
2. احسب $f'(x)$.
3. استنتج جدول تغيرات الدالة f.

الحل:
1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$.
2. لدينا $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
		-	0	+	
رتابة f	$+\infty$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

مثال2: نعتبر الدالة f حيث $f(x) = x^2 - 6x$
نفس أسئلة المثال السابق.

مثال3: نعتبر الدالة f حيث $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$
نفس أسئلة المثال السابق.

مثال4: نعتبر الدالة f حيث $f(x) = 2x^3 - 6x$
نفس أسئلة المثال السابق.

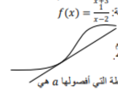
مثال5: نعتبر الدالة f حيث $f(x) = x^3 + x$
نفس أسئلة المثال السابق.

مثال6: نعتبر الدالة f حيث $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$
1. حدد مجموعة تعريف f.
2. احسب $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
3. احسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

مثال7: نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للحالة: $f(x) = \frac{x+4}{x+3}$

مثال8: نفس الأسئلة السابقة بالنسبة للحالة: $f(x) = \frac{1}{x-2}$

2. معادلة مماس منحنى دالة:



تعريف: مماس منحنى في نقطة هو مستقيم يقطع المنحنى في هذه النقطة و لا يخترقه.

قاعدة: معادلة مماس المنحنى C_f في النقطة التي أفصولها a هي
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

مثال: $f(x) = x^2 + 2x - 1$
لدينا $f(1) = 2$
ولدينا $f'(x) = 2x + 2$ إذن $f'(1) = 4$
معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة التي أفصولها 1 هي

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
$y = 4(x-1) + 2$.
$y = 4x - 2$.

تمرين تطبيقي: $f(x) = x^3 - x^2 + 2$
حدد معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة التي أفصولها 0.
حدد معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة التي أفصولها 1

عموميات حول الدوال العددية

مجموعة تعريف بعض الدوال العددية:

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بما يلي:	مجموعة تعريف الدالة f هي:
$f(x) = P(x)$	
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$	$D_f = \{x \in IR / Q(x) \neq 0\}$
$f(x) = \sqrt{P(x)}$	$D_f = \{x \in IR / P(x) \geq 0\}$
$f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D_f = \{x \in IR / Q(x) > 0\}$

أمثلة:

✓ $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ مجموعة تعريفها هي: $D_f = IR$ لأنها دالة حدودية.
✓ $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$
$D_f = \{x \in IR / 3x - 1 \neq 0\}$ أي $D_f = \{x \in IR / 3x \neq 1\}$ و منه $D_f = \{x \in IR / x \neq \frac{1}{3}\}$
✓ $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
$D_f = \{x \in IR / 2x - 1 \geq 0\}$ أي $D_f = \{x \in IR / x \geq \frac{1}{2}\}$

	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3x+5$		−	0	+	

و بالتالي $D_f = [\frac{1}{2}; +\infty[$

الدالة الزوجية و الدالة الفردية:

لكي نبين أن f دالة زوجية، يجب تحقق الشرطان التاليان:	لكي نبين أن f دالة فردية، يجب تحقق الشرطان التاليان:
✓ لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ ✓ $f(-x) = f(x)$	✓ لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ ✓ $f(-x) = -f(x)$

أمثلة:

✓ $f(x) = 2x^2 + 2$. لنبين أن f دالة زوجية.

يجب دائما تحديد مجموعة تعريف الدالة f : $D_f = IR$ لأن f دالة حدودية.

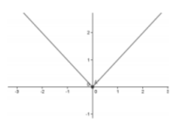
بما أن D_f متماثل بالنسبة للعدد 0 ، فإن لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ ولدينا:

$f(-x) = 2(-x)^2 + 2 = 2x^2 + 2 = f(x)$ ، إذن f دالة زوجية.

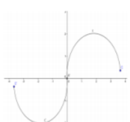
✓ $f(x) = x^3$. لنبين أن f دالة فردية.

لدينا $D_f = IR$ ،إذن لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$ و: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ، إذن f دالة فردية.

التمثيل المبياني للدالة الزوجية و الدالة الفردية:



الدالة الزوجية منحناها متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.



الدالة الفردية منحناها متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

الدالة المكبورة-الدالة المصغورة-الدالة المحدودة:

f مكبورة بالعدد M	f مصغورة بالعدد M	f محدودة
		مكبورة و محدودة $m \leq f(x) \leq M$

مثال:

$f(x) = -2x^2 + 3$ لنبين أن f دالة مكبورة بالعدد 3.

لكل $x \in IR$ ، لدينا $-2x^2 \leq 0$ و منه $-2x^2 + 3 \leq 3$ ، أي $f(x) \leq 3$ و بالتالي f مكبورة بالعدد 3.

معدل التغير و الرتابة: ليكن a و b من I

العدد $T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$ يسمى معدل التغير.

- $T \geq 0$: f تزايدية على I
- $T \leq 0$: f تناقصية على I

مثال:

$f(x) = x^2$ لندرس تغيرات الدالة f على $IR^+ = [0; +\infty[$

ليكن a و b من IR^+. $T = \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a + b$ ، بما أن $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فإن $a + b \geq 0$ إذن $T \geq 0$ و منه f تزايدية على IR^+.

المتتاليات

المتتاليـــات العددية

اليمني محمد www.sbaysite.com

I ـ تعاريف واصطلاحات :

1) نشاط تمهيدي :

نقسم القطعة $[0;1]$ إلى قطعتين لهما نفس الطول . ونكرر هذه العملية على إحدى القطعتين المحصلتين .

أ ـ احسب طول القطع المحصلة في التقسيم الأول والثاني والثالث والرابع .

ب نعرف دالة عددية f من IN^* نحو IR كما يلي : بكل تقسيم نربط الطول $f(n)$ للقطعة المحصلة . تظنن $f(n)$.

2) تعريف :

> ليكن I جزء من IN . كل دالة عددية من I نحو IR تسمى متتالية عددية .

3) ترميز واصطلاحات :

نعتبر $U : I \to IR$ متتالية عددية .

- نرمز لصورة n بالرمز U_n بدلا من $U(n)$.
- نرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in I}$ بدلا من U .
- إذا كان $I = IN$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in IN}$ أو $(U_n)_{n\geq 0}$ أو (U_n) .
- إذا كان $I = IN^*$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in IN^*}$ أو $(U_n)_{n\geq 1}$.
- إذا كان $I = \{n\in IN / n\geq n_0\}$ فإنه يرمز للمتتالية بالرمز $(U_n)_{n\in I}$ أو $(U_n)_{n\geq n_0}$.
- لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية . U_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n أو الحد العام للمتتالية $(U_n)_{n\in I}$.
- تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ منتهية إذا كانت I مجموعة منتهية .
- مجموعة قيم المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هي : $\{U_n / n\in I\}$.

4) تحديد متتالية :

تحدد المتتالية إذا علمت جميع حدودها أو الوسيلة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها . وهناك طرق لتحديد متتالية نذكر منها :

أ ـ المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة لحدها العام :

أمثلة :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = n^2+3$ ؛ هذه المتتالية محددة بالصيغة الصريحة لحدها العام .
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 و U_{n+1} و U_{2n} و U_{2n+1} .
2. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 و U_{2n} و U_{2n+1} .
3. a عدد حقيقي . المتتالية (V_n) المعرفة بما يلي : $V_n = a$ لكل n من IN .
   هذه المتتالية تسمى متتالية ثابتة .

ب ـ المتتاليات الترجعية :

وهي المتتاليات التي يحسب أي حد من حدودها بالرجوع إلى حدود أخرى .

أمثلة :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = -3U_n+5$. هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعية .
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 .
2. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_3 = -1$ و $U_n = 2U_{n-1}+3$
   احسب : U_1 و U_2 و U_3 .
3. نعتبر المتتالية (a_n) المعرفة بما يلي : $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ و $a_n = a_{n-1}+2a_{n-2}$ لكل $n\geq 2$.
   احسب : a_2 و a_3 و a_4 .

تمرين 1:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_4 = 1$ و $U_n = 2U_{n-1}+3$

احسب : U_0 .

III ـ المتتاليات المكبورة المتتاليات المصغورة ـ المتتاليات المحدودة ـ المتتاليات الرتيبة :

1) المتتاليات المكبورة المتتاليات المصغورة :

أنشطة تمهيدية :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = 3n+5$ لكل n من IN .
   بين أن : $U_n \geq 5$ لكل n من IN .
2. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_n = 2-3n$ لكل n من IN .
   بين أن : $V_n \leq 2$ لكل n من IN .

تعريف :

> تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ مكبورة إذا كان يوجد عدد حقيقي M بحيث : $U_n \leq M$ لكل n من I .
> تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ مصغورة إذا كان يوجد عدد حقيقي m بحيث : $U_n \geq m$ لكل n من I .

ملاحظة :

يمكن تعويض المتفاوتتين $U_n \leq M$ و $U_n \geq m$ بالمتفاوتتين : $U_n \prec M$ و $U_n \succ m$.

تمرين 2 :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = -1$ و $U_{n+1} = \frac{4}{4-U_n}$ لكل n من IN .
   ـ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ مكبورة بالعدد 2 . (بين أن $U_n \prec 2$ لكل n من IN).
2. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_0 = -3$ و $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n - 2$ لكل n من IN .
   ـ بين أن المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ مصغورة بالعدد 4 - . (بين أن $V_n \geq -4$ لكل n من IN) .

2) المتتاليات المحدودة :

تعريف :

> تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة ومصغورة . أي يوجد عددين حقيقيين M و m بحيث :
> $m \leq U_n \leq M$ لكل n من I . (أو : $m \prec U_n \prec M$ لكل n من I).

مثال :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{1}{n}$ لكل $n\geq 1$.

لدينا : $0 \leq U_n \leq 1$ لكل $n\geq 1$.

إذن : $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة .

خاصية :

> تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وفقط إذا كان يوجد عدد حقيقي $\alpha \succ 0$ بحيث : $|U_n| \leq \alpha$ لكل n من I .
> (أو : $|U_n| \prec \alpha$ لكل n من I) .

اليمني محمد

تمرين 3 :

1. نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_1 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$ لكل $n\geq 1$.
   بين أن : $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية محدودة .
2. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ لكل n من IN .
   بين أن : $(V_n)_{n\geq 0}$ محدودة .

3) المتتاليات الرتيبة :

أنشطة تمهيدية :

1 ـ نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{2n+1}{n+3}$ لكل n من IN .

ادرس إشارة الفرق : $U_{n+1}-U_n$.

لدينا : $U_{n+1}-U_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+3} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n^2+9n+9-2n^2-9n-4}{(n+4)(n+3)} = \frac{5}{(n+4)(n+3)}$

بما أن : $\frac{5}{(n+4)(n+3)} \succ 0$ لكل n من IN .

إذن : لكل n من IN $U_{n+1}-U_n \succ 0$

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا .

2 ـ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $v_n = \frac{3n+5}{n+1}$ لكل n من IN .

ادرس إشارة الفرق : $v_{n+1}-v_n$

لدينا : $v_{n+1}-v_n = \frac{-2}{(n+1)(n+2)} \prec 0$ لكل n من IN .

نقول إن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا .

تعريف :

> لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .
> 1) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2 ;\ n\prec m \Rightarrow U_n \leq U_m$.
> 2) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2 ;\ n\prec m \Rightarrow U_n \prec U_m$.
> 3) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2 ;\ n\prec m \Rightarrow U_n \geq U_m$.
> 4) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2 ;\ n\prec m \Rightarrow U_n \succ U_m$.
> 5) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ ثابتة إذا كان : $\forall(n;m)\in I^2 ;\ U_n = U_m$.

خاصية :

> لتكن $(U_n)_{n\in I}$ متتالية عددية .
> 1) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا كان : $\forall n\in I : U_n \leq U_{n+1}$.
> 2) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا إذا كان : $\forall n\in I : U_n \prec U_{n+1}$.
> 3) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية إذا كان : $\forall n\in I : U_n \succ U_{n+1}$.
> 4) نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا إذا كان : $\forall n\in I : U_n \succ U_{n+1}$.

ملاحظات :

- لدراسة رتابة متتالية $(U_n)_{n\in I}$ نتبع إحدى الطرق التالية :
  1. نقارن U_n و U_{n+1}
  2. ندرس إشارة الفرق $U_{n+1}-U_n$.
  3. إذا كانت $U_n \succ 0$ نقارن $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1
  4. إذا كانت $U_n = f(n)$ فإننا نستعمل رتابة الدالة f .
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تزايدية فإن : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq .....$.
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تناقصية فإن : $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq .....$.

تمرين 4 :

I ـ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+2} \end{cases}$

1) احسب : u_1 و u_2 .

2) بين أن $u_n \prec \sqrt{3}$ لكل n من IN .

3) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية ، واستنتج أن $u_n \geq 1$ لكل n من IN .

II ـ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} v_0 = \frac{5}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{4}{v_n}\right) \end{cases}$

1) احسب : v_1 و v_2 .

2) بين أن $v_n \succ 2$ لكل n من IN .

3) بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ تناقصية ، واستنتج أن $v_n \leq \frac{5}{2}$ لكل n من IN .

II ـ المتتاليات الحسابية المتتاليات الهندسية :

1) المتتاليات الحسابية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_n = 2n+1$ لكل n من IN .

احسب الفرق : $U_{n+1}-U_n$ لكل n من IN .

لدينا : $U_{n+1}-U_n = 2(n+1)+1-2n-1 = 2$ لكل n من IN .

إذن : $U_{n+1} = U_n + 2$

نقول إن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 2 .

أ ـ تعريف :

> تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية إذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث : $U_{n+1} = U_n + r$ لكل n من I .
> العدد r يسمى أساس المتتالية .

ملاحظة :

لكي نبين أن متتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية يكفي أن نبين أن الفرق $U_{n+1}-U_n$ عدد ثابت لكل n من I . أي غير مرتبط ب n . (فرق حدين متتابعين عدد ثابت) .

تمرين تطبيقي :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 7$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n-5}{2}$

بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ حسابية وحدد أساسها .

ب ـ خاصيات :

1. خاصية مميزة :

نشاط تمهيدي : نعتبر متتالية حسابية $(U_n)_{n\in I}$ أساسها r .

ـ احسب بدلالة U_n المجموع $U_{n-1}+U_{n+1}$. ماذا تستنتج ؟

ـ نعتبر متتالية $(U_n)_{n\in I}$ بحيث : $U_{n-1}+U_{n+1} = 2U_n$ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ حسابية .

خاصية :

> تكون $(U_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $U_{n-1}+U_{n+1} = 2U_n$ لكل n من I .

نتيجة

> تكون a و b و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان : a + c = 2b .

تمرين تطبيقي:

نعتبر $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r بحيث : $U_1+U_3 = 16$ و $U_1\times U_2 = 28$.

احسب : U_0 و r .

تمرين 5 :

نعتبر المتتالية الحسابية (a_n) بحيث : $\begin{cases} a_4 + a_6 = 6 \\ a_8+a_{10}+a_{12}+a_{14} = 228 \end{cases}$.

احسب الحد الأول a_0 والأساس r لهذه المتتالية .

2. صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية حسابية $(U_n)_{n\geq 0}$ أساسها r وحدها الأول U_0 . احسب U_n بدلالة U_0 و r و n لكل n من IN .

خاصية :

> إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0 فإن حدها العام : $U_n = U_0 + nr$

ملاحظات :

1. إذا كانت $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_1 فإن حدها العام : $U_n = U_1+(n-1)r$
2. إذا كانت $(U_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_{n_0} فإن حدها العام : $U_n = U_{n_0}+(n-n_0)r$.

تمارين تطبيقية :

1) احسب الحد العام للمتتالية الحسابية المعرفة في التمرين السابق .

2) نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $U_0 = 7$ و $U_{n+1} = U_n - \frac{5}{2}$. احسب U_{1000} .

3) نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $V_5 = -1$ و $V_n = V_{n-1}+1$. احسب V_{2005} .

3. مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية حسابية $(U_n)_{n\geq 0}$ أساسها r وحدها الأول U_0 . ونعتبر المجموع : $S_n = U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.

S_n يسمى مجموع n حد أول من المتتالية الحسابية $(U_n)_{n\geq 0}$.

احسب S_n بدلالة U_0 و U_{n-1} و n .

لدينا : $S_n = U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.

و : $S_n = U_{n-1}+U_{n-2}+.....+U_0$.

إذن : $2S_n = (U_0+U_{n-1})+(U_1+U_{n-2})+...+(U_p+U_{n-(p+1)})+...+(U_{n-1}+U_0)$

ولدينا : $U_p+U_{n-p-1} = U_0+pr+U_0+(n-p-1)r$.

$= U_0+pr+U_0+(n-1)r-pr = U_0+U_{n-1}$

إذن : لكل $p\geq 0$ لدينا : $U_p+U_{n-p-1} = U_0+U_{n-1}$.

إذن : $2S_n = n(U_0+U_{n-1})$. وبالتالي فإن : $S_n = \frac{n}{2}(U_0+U_{n-1})$

خاصية :

> إذا كانت $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول U_0 و $S_n = U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.
> فإن : $S_n = \frac{n}{2}(U_0+U_{n-1})$
> بتعبير آخر : مجموع n حد أول من متتالية حسابية $S_n = \frac{n}{2}(U_0+U_{n-1})$

ملاحظة:

$S_n = \frac{\text{(الحد الأول + الحد الأخير) × عدد الحدود}}{2}$

* إذا كان U_1 هو الحد الأول من متتالية حسابية فإن : $S_n = U_1+U_2+.....+U_n = \frac{n}{2}(U_1+U_n)$.

* عدد حدود المجموع : $U_p+U_{p+1}+....+U_n$ هو : $n-p+1$.

تمارين تطبيقية :

1) احسب المجموع : $1+2+3+......+n$.

2) احسب المجموع : (1 + 2n) +..... + 7 + 5 + 3 + 1 .

3) $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $U_0 = 3$ احسب المجموع : $U_5+U_6+....+U_{30}$

تمرين 6 :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = -1$ و $U_{n+1} = \frac{4}{4-U_n}$ لكل n من IN .

1) أ ـ بين أن $U_n \prec 2$ لكل n من IN .

ب ـ بين أن $(U_n)_{n\geq 0}$ تزايدية .

2) نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $V_n = \frac{1}{2-U_n}$ لكل n من IN .

أ ـ بين أن $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية وحدد أساسها وحدها الأول

ب ـ احسب V_n ثم U_n بدلالة n .

ج ـ احسب المجموع : $S_n = V_0+V_1+....+V_n$ بدلالة n .

2) المتتاليات الهندسية :

نشاط تمهيدي :

استثمر صيدلي في مشروع إنشاء صيدلية مبلغا قدره 000 100 درهم ، ولاحظ أن ربحه الصافي في الشهر الأول هو 000 5 درهم ، وأن ربحه في كل شهر يزيد بنسبة 5 % عن ربحه في الشهر الذي يسبقه .

ليكن u_1 الربح الصافي للصيدلي في الشهر الأول ، و u_n ربحه الصافي في الشهر n .

1) احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .

2) تحقق من أن : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3}$.

3) حدد علاقة بين u_{n+1} و u_n .

4) بين بالترجع أن : $\forall n\in IN^* : u_{n+1} = 1.05u_n$

نقول في هذه الحالة إن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها 1.05 وحدها الأول u_1 .

أ ـ تعريف :

> تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية إذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث : $U_{n+1} = qU_n$ لكل n من I .
> العدد q يسمى أساس المتتالية .

أمثلة : المتتاليات $(U_n)_{n\geq 0}$ و $(V_n)_{n\geq 0}$ و $(W_n)_{n\geq 0}$ المعرفة على التوالي بما يلي : $U_n = 2^n$ و $V_n = \frac{1}{3^n}$ و

نهاية دالة عددية

ثانوية تمسمان – ذ.بدر بوصفيحة — **نهايات الدوال العددية** — المستوى: أولى باك آداب

I. نهايات دالة عند $+\infty$ و $-\infty$:

بصفة عامة:

-إذا كانت $f(x)$ تأخذ قيما موجبة و كبيرة جدا عندما يأخذ x قيما موجبة وكبيرة فإننا نقول أن $f(x)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما تؤول x إلى $+\infty$ ونكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

بنفس الطريقة نعرف $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. هذه النهايات تسمى نهايات غير منتهية.

إذا كان لدينا $\lim_{x\to+\infty}(x)=l$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ حيث $l\in\mathbb{R}$ فإنها تسمى نهاية منتهية.

قواعد الحساب على $+\infty$ و $-\infty$:

نقبل الاصطلاحات التالية كوسائل مساعدة على حساب النهايات:

$(+\infty)^n=+\infty$. $(-\infty)^n=\begin{cases}-\infty & \text{فردي } n\\ +\infty & \text{زوجي } n\end{cases}$ $\frac{1}{+\infty}=0$ و $\frac{1}{-\infty}=0$.	$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$. $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$. $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$. $(-\infty)\times(-\infty)=+\infty$. $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$.

ليكن k عددا حقيقيا:

إذا كان k موجبا: $k\times(+\infty)=+\infty$. $k\times(-\infty)=-\infty$. إذا كان k سالبا: $k\times(+\infty)=-\infty$. $k\times(-\infty)=+\infty$.	$k+\infty=+\infty$. $k-\infty=-\infty$. $+\infty-k=+\infty$. $-\infty-k=-\infty$.

عمليات لا يمكن حسابها مباشرة (الأشكال الغير محددة):

$0\times(\mp\infty)$. $\frac{0}{0}$.	$+\infty-\infty$ أو $-\infty+\infty$. $\frac{\mp\infty}{\mp\infty}$.

هذه العمليات تسمى أشكالا غير محدودة, بمعنى أنه لا يمكن حسابها مباشرة . ولكن يمكن حسابها بعد إجراء عمليات تبسيط كالإختزال, الضرب في المرافق, التعميل...

قاعدة الحساب:

لحساب نهاية دالة عند $\pm\infty$ يكفي أن نعوض x بالقيمة $\pm\infty$ و نحسب النتيجة باحترام القاعدة السابقة.

أمثلة:

- ✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-2x+1}=\frac{1}{-2(+\infty)+1}=\frac{1}{-\infty+1}=\frac{1}{-\infty}=0.$
- ✓ $\lim_{x\to-\infty}x^3=(-\infty)^3=-\infty.$
- ✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\frac{(+\infty)^2}{+\infty}=\frac{+\infty}{+\infty}$.

وهو شكل غير محدد. لذلك سنحاول تبسيط الدالة: لدينا $\frac{x^2}{x}=x$ إذن:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$.

- ✓ $\lim_{x\to+\infty}x^2-x=(+\infty)^2-(+\infty)=+\infty-\infty$.

وهو شكل غير محدد لذلك سنحاول تبسيط الدالة: لدينا $x^2-x=x(x-1)$

$\lim_{x\to+\infty}x^2-x=\lim_{x\to+\infty}x(x-1)=+\infty(+\infty-1)$
$=+\infty\times(+\infty)=+\infty$.

تمرين تطبيقي: احسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to+\infty}3x^2+5x+1$; $\lim_{x\to-\infty}(1-x)^3+\frac{7}{x}$.
$\lim_{x\to-\infty}(2x-1)(x+1)$; $\lim_{x\to-\infty}-2x^3+(x^2-1)(1-3x)$.
$\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x^2+7}$.

خاصية: (نهاية الدوال الحدودية و الجذرية)

لتكن P دالة حدودية درجتها n حيث:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0.$
$\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n.$

لتكن دالة حدودية أخرى درجتها حيث:

$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0.$
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$

أمثلة:

$\lim_{x\to+\infty}-3x^2+5x+1=\lim_{x\to+\infty}-3x^2=-\infty.$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+5x+1}{x^2+x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty.$

تمرين تطبيقي: احسب النهايات التالية:

$\lim_{x\to+\infty}-2x^6+5x^3+x-3$; $\lim_{x\to+\infty}x^2-3x.$
$\lim_{n\to+\infty}\frac{-3x^5+5}{x^3+4}$; $\lim_{n\to-\infty}\frac{3x^3-x+7}{2-x^3}.$
$\lim_{n\to-\infty}\frac{x^4-x+1}{-x^3+x-6}.$

II. نهاية دالة عند عدد :

تعريف1:

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى العدد الحقيقي a فإننا نكتب: $\lim_{x\to a}f(x)=l$.

تعريف 2:

-إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a من جهة اليمين فإننا نكتب: $\lim_{x\to a^+}f(x)=l$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x>a}}f(x)=l$

-إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى a من جهة اليسار فإننا نكتب: $\lim_{x\to a^-}f(x)=l$ أو $\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}f(x)=l$

حيث $l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty;-\infty\}$

خاصية:

$$\lim_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\begin{cases}\lim_{x\to a^+}f(x)=l\\ \lim_{x\to a^-}f(x)=l\end{cases}$$

اصطلاحات يجب احترامها أثناء حساب نهاية دالة عند عدد:

- ✓ $\frac{1}{0^+}=+\infty$ و $\frac{1}{0^-}=-\infty$
- ✓ $\frac{0}{0}$ شكل غير محدد.

قاعدة الحساب:

لحساب نهاية دالة عند عدد a يكفي فقط تعويض x بالقيمة a ونحسب النتيجة مع احترام الإصطلاحات السابقة.

مثال:

$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{2-2x}=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}.$

لمعرفة هل النهاية تؤول إلى $\frac{1}{0^+}$ أو إلى $\frac{1}{0^-}$ يكفي تحديد إشارة مقام الدالة عندما يؤول x إلى 1 عن اليسار. لدينا $x<1$ إذن $-2x>-2$ ومنه $2-2x$ عدد موجب وبالتالي:

$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{2-2x}\right)=\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$

تمرين تطبيقي1: احسب النهاية:

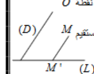
$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x}{2x-4}$ و $\lim_{\substack{x\to3\\x<3}}\left(x+\frac{x-1}{4x-12}\right)$ و $\lim_{\substack{x\to5\\x<5}}\left(\frac{2x+3}{x-5}\right)$

الهندسة المستوية ـ المتتاليات

ج . م . ع	الإسقاط ملخص الدرس	ج.بوعيون

I) تعريف .

ليكن (D) و (L) مستقيمين متقاطعين في نقطة O
ولتكن M نقطة من المستوى (P)
ولتكن M' نقطة تقاطع المستقيم (L) والمستقيم المار من M والموازي لـ (D) .
النقطة M' تسمى مسقط النقطة M على (L) بتوازي مع (D) .



ملاحظات

a) مسقط كل نقطة M من (L) هي نفسها ، نقول إنها صامدة .
b) مسقط كل نقطة M من (D) هي النقطة O .
c) الإسقاط على (L) بتوازي مع (D) هو عبارة عن تطبيق p من المستوى (P) نحو (P) .
وإذا كانت M' هي مسقط M نكتب $p(M)=M'$.
d) إذا كان $(L)\perp(D)$ فإن p يسمى الإسقاط العمودي على (L) .

II) خاصيات .

1) الإسقاط يحافظ على المرجح يعني :
إذا كان G مرجح $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$
و $p(A)=A'$ و $p(B)=B'$ و $p(G)=G'$
فإن G' مرجح $\{(A',\alpha),(B',\beta)\}$

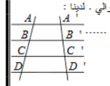
2) الإسقاط يحافظ على المنتصف يعني :
إذا كان I منتصف $[AB]$ فإن I' مرجح $[A'B']$
حيث و $p(A)=A'$ و $p(B)=B'$

3) الإسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين يعني :
إذا كان $\overline{AB}=k\overline{CD}$ فإن $\overline{A'B'}=k\overline{C'D'}$
النقط A' و B' و C' و D' هي صور A و B و C و D على التوالي .

III) طاليس

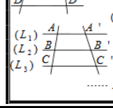
1) ليكن (L_1) و (L_2) و (L_3) و (L_4) أربع مستقيمات متوازية و (D) و (D') قاطعان لهما في النقط A و B و C و D و A' و B' و C' و D' على التوالي . لدينا :

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ و $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{B'D'}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{BD}}$ و ......



2) ليكن (L_1) و (L_2) و (L_3) 3 مستقيمات متوازية و (D) و (D') قاطعان لهما في النقط A و B و C و A' و B' و C' على التوالي .
لدينا :

$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ و $\frac{\overline{C'B'}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$ و ......

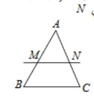


3) ليكن (ABC) مثلثا . (D) مستقيم يوازي (BC) ويقطع (AB) في M و (AC) في N

لدينا : $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$

و $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}$

ملاحظة $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}\neq\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$

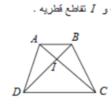


4) ليكن $(ABCD)$ شبه منحرف و I تقاطع قطريه .

لدينا : $\frac{\overline{IA}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{IB}}{\overline{ID}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$

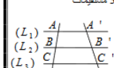
و $\frac{\overline{IC}}{\overline{IA}}=\frac{\overline{ID}}{\overline{IB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$

ملاحظة $\frac{\overline{BI}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{AC}}\neq\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$



5) خاصية طاليس العكسية :

a) ليكن (L_1) و (L_2) و (L_3) و 3 مستقيمات و (D) و (D') قاطعان لهما في النقط A و B و C و A' و B' و C' على التوالي .



إذا كان $\begin{cases}(L_1)//(L_2)\\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}\end{cases}$ فإن $(L_1)//(L_2)//(L_3)$

b) ليكن (ABC) مثلثا . M من (AB) و N من (AC)
إذا كان $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ فإن $(MN)//(BC)$

ملاحظة :

1) في الخاصيات 1-2-3-4 المتعلقة بخاصيات طاليس المباشرة يمكن استعمال المسافة عوض القياس الجبري . اما في الخاصية العكسية (5) فهذا غير ممكن .
2) إذا كانت النقط A و B و C و D مستقيمية فإن $\overline{AB}=k\overline{CD}$ تكافئ $\overline{AB}=k\overline{CD}$

$W_n=(-1)^n$ هي متتاليات هندسية . (تحقق من ذلك ، وحدد أساس كل منها) .

ب ـ خاصيات :

1. خاصية مميزة :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية هندسية $(U_n)_{n\in I}$ أساسها q .
ـ احسب بدلالة U_n الجداء $U_{n-1}\times U_{n+1}$. ماذا تستنتج ؟
ـ نعتبر متتالية $(U_n)_{n\in I}$ بحيث : $U_{n-1}\times U_{n+1}=(U_n)^2$ بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية .

خاصية :

> تكون المتتالية $(U_n)_{n\in I}$ هندسية إذا وفقط إذا كان : $U_{n-1}\times U_{n+1}=(U_n)^2$ لكل n من I .

نتيجة :

> تكون a و b و c حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان : $a\times c=b^2$.

تمرين تطبيقي :

لتكن $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 بحيث : $U_1\succ0$ و $U_0\times U_2=\frac{25}{4}$ و $U_0+U_1=\frac{13}{2}$. احسب : U_1 و U_0 و q

تمرين 7 :

a وb و c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية بحيث : a + b + c =30 و (a – 5) و(b -3) و c هي ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية .
احسب : a و b و c .

2. الحد العام لمتتالية هندسية :

نشاط تمهيدي :

لتكن $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 .
احسب U_n بدلالة U_0 و q ون لكل nمن IN .

الجواب :

لدينا : $U_1=qU_0$ و $U_2=qU_1$ و ...... و $U_n=qU_{n-1}$
نضرب هذه المتساويات طرفا طرفا (هناك n متساوية) فنجد : $U_1\times U_2\times......\times U_n=q^nU_0\times U_1\times.....\times U_{n-1}$
بما أن $U_0q\neq0$ فإن : $U_k\neq0$ لكل k من IN (لاحظ ذلك في المتساويات) .
إذن : $U_n=U_0q^n$.

خاصية :

> إذا كانت $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 فإن : $U_n=U_0q^n$.

تطبيقات :

1) في التمرين التطبيقي السابق : $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{8}{3}$ وحدها الأول $U_0=4$
احسب U_n بدلالة n .
الجواب : $U_n=U_0q^n=4\times\left(\frac{8}{3}\right)^n$ لكل n من IN .
2) في النشاط التمهيدي السابق u_n يمثل الربح الصافي للصيدلي في الشهر n .
احسب u_n بدلالة n واستنتج قيمة الربح الصافي للصيدلي في الشهر العاشر .

مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر متتالية هندسية $(U_n)_{n\geq0}$ أساسها q وحدها الأول U_0 . ونعتبر المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$. S_n هو مجموع n حد أول من المتتالية الهندسية $(U_n)_{n\geq0}$.

لدينا : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.
$S_n=U_0+U_0q+U_0q^2+....+U_0q^{n-1}$ نضرب طرفي هذه المتساوية في q ، نحصل على :
$qS_n=U_0q+U_0q^2+U_0q^3+....+U_0q^n$.
نحسب الفرق S_n-qS_n نحصل على : $S_n-qS_n=U_0-U_0q^n$
إذن : $(1-q)S_n=U_0(1-q^n)$.
إذا كان $q\neq1$ فإن : $S_n=U_0\frac{1-q^n}{1-q}$. إذا كان $q=1$ فإن : $S_n=nU_0$.

خاصية :

> لتكن $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0 .
> ونعتبر المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.
> - إذا كان $q\neq1$ فإن : $S_n=U_0\frac{1-q^n}{1-q}$.
> - إذا كان $q=1$ فإن : $S_n=nU_0$.

ملاحظة :

- إذا كان U_1 الحد الأول لمتتالية هندسية $(U_n)_{n\geq1}$ أساسها q ($q\neq1$) فإن : S_n مجموع n حد أول منها يصبح : $S_n=U_1\frac{1-q^n}{1-q}$.

$$S_n=\frac{\text{الحد الأول}\times(1-q^{(\text{عدد الحدود})})}{1-q}$$

تطبيقات :

1) في التمرين التطبيقي السابق : $(U_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{8}{3}$ وحدها الأول $U_0=4$.
نعتبر المجموع : $S_n=U_0+U_1+.....+U_{n-1}$.
احسب S_n بدلالة n .
2) في النشاط التمهيدي السابق u_n يمثل الربح الصافي للصيدلي في الشهر n .
نعتبر المجموع : $S_n=u_1+u_2+...+u_n$
S_n هو مجموع الأرباح الصافية للصيدلي إلى حدود الشهر n .
احسب S_n بدلالة n واستنتج مجموع الأرباح الصافية للصيدلي سنة بعد إنشاء الصيدلية .
3) احسب المجموعين : $1+3+3^2+3^3+....+3^{1000}$ و $3^{10}+3^{11}+3^{12}+.....+3^{1000}$.

تمرين 8:

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $U_0=2$ و $U_{n+1}=1+\frac{2}{5}U_n$ لكل n من IN .
ونعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in IN}$ المعرفة ب : $V_n=U_n-\frac{5}{3}$.
أ ـ بين أن : $(V_n)_{n\in IN}$ متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .
ب ـ عبر عن V_n بدلالة n .
ج ـ احسب المجموع : $S_n=V_0+V_1+V_2+......+V_n$ بدلالة n .

الهندسة الفضائية التوازي و التعامد

الهندسة الفضائية

التمرين 1 : في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر المستوى (P) والفلكة (S) حيث :

$(P): x-2y+2z-2=0$

و $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

1. حدد مركز وشعاع الفلكة (S) .
2. بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .

التمرين 2 : نعتبر في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ المجموعة (S) حيث :

$$(S)=\left\{M(x,y,z)\in\mathcal{E} / x^2+y^2+z^2+4x-6z+4=0\right\}$$

1. بين أن (S) فلكة محددا مركزها Ω وشعاعها R .
2. ليكن (P) المستوى ذا المعادلة : $2x+y-2z+1=0$.
   بين أن (P) مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .
3. ليكن (Q) المستوى المار من النقطة $A\left(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$ و $\vec{u}(1,2,2)$ متجهة منظمية عليه .
   أ - بين أن (P) و (Q) متعامدان .
   ب- بين أن المتجهتين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{A\Omega}$ مستقيميتان .
   جـ- بين أن الفلكة (S) والمستوى (Q) يتقاطعان وفق دائرة محددا مركزها ω وشعاعها r .

التمرين 3: الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث :

$x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1. بين أن (S) فلكة مركزها $\Omega(0,2,-1)$ وشعاعها $r=\sqrt{3}$.
2. أ- تحقق من أن النقطة $A(-1,1,0)$ تنتمي إلى الفلكة (S) .
   ب- أكتب معادلة المستوى (P) المماس للفلكة (S) في النقطة A .
3. أ- تحقق من أن : $x+y+z-2=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من النقطة $B(1,3,-2)$ و $\vec{n}(1,1,1)$ متجهة منظمية عليه .
   ب- بين أن (Q) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة محددا مركزها وشعاعها

التمرين 4 : في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث :

$$x^2+y^2+z^2+x-\frac{1}{4}=0$$

1. تحقق من أن (S) فلكة محددا مركزها و شعاعها .
2. بين أن المستوى (P) ذا المعادلة : $y+z-1=0$ مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .
3. نعتبر المستوى (Q) ذو المعادلة : $2x-y+z+1=0$.
   أ- تحقق من أن المستويين (P) و (Q) متعامدان .
   ب- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q) .
   جـ- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .
   د- بين أن تقاطع (S) و (Q) دائرة (C) ؛ محدد مركزها وشعاعها.

التمرين 5 : نعتبر في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ النقط : $A(1,2,-2)$ و $B(0,3,-3)$ و $C(1,1,-2)$ والمستوى (P) الذي معادلته : $x+y-3=0$.

1. أ- أحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى (P) .
   ب- استنتج أن معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ والمماسة للمستوى (P) هي : $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$.
2. أ- حدد $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.
   ب- بين أن : $x-z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
3. أ- تحقق من أن الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC) .
   ب- أحسب المسافة ΩC واستنتج نقطة تماس (S) و المستوى (ABC) .

التمرين 6 : في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم؛ نعتبر النقطة $A(2,0,2)$ و المستوى (P) ذا المعادلة :

$x+y-z-3=0$

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P) .
2. حدد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) .
3. نعتبر الفلكة (S) التي مركزها A والتي تقطع المستوى (P) وفق الدائرة التي مركزها B وشعاعها 2 .
   أ- حدد شعاع الفلكة (S) .
   ب- أكتب معادلة ديكارتية للفلكة (S) .

التمرين 7 : الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط :
$A(2,-1,1)$ و $B(2,3,-1)$ و $C(1,1,1)$.

1. أ- بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.
   ب- استنتج مسافة النقطة A عن المستقيم (BC) .
2. ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .
   بين أن $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ هو مثلوث إحداثيات H .
   (يمكن استعمال تمثيل بارامتري للمستقيم (BC)) .
3. حدد معادلة ديكارتية للفلكة التي أحد أقطارها $[AH]$.
4. أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين 8 : في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط $A(-1,2,-1)$ و $B(1,0,0)$ و $C(2,1,0)$.

1. أ- حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{A\Omega}\wedge\overrightarrow{AB}$.
   ب- أحسب مساحة المثلث ΩAB .
   جـ- استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ΩAB) .
2. أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AB) .
3. نعتبر في $\mathcal{E}$ ؛ الفلكة (S) التي معادلتها :
   $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$.
   أ- حدد مركز وشعاع الفلكة (S) .
   ب- حدد تقاطع الفلكة (S) و المستوى (ΩAB) .
   جـ- بين أن المستقيم (AB) يقطع الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين I و J ينبغي تحديدهما .

التمرين 9 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط $A(1,1,-1)$ و $B(2,0,1)$ و $C(3,1,1)$.

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AB) .
2. أ- حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ؛ ثم استنتج مسافة النقطة C عن المستقيم (AB) .
   ب- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من النقطة O والموازي للمستوى (ABC) .
3. نعتبر في $\mathcal{E}$ ؛ الفلكة (S) التي معادلتها :
   $$x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+9=0$$
   أ- حدد مركز وشعاع الفلكة (S) .
   ب- بين أن المستقيم (AB) مماس للفلكة (S) ثم حدد نقطة تماسهما.
   جـ- بين أن المستوى (Q) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة محددا مركزها وشعاعها .

التمرين 10 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط $A(-3,0,0)$ و $B(-1,0,-1)$ و $C(-1,1,0)$ و $\Omega(1,-1,0)$.

1. أ- حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   ب- استنتج أن $x-2y+2z+3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
2. أ- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها Ω وشعاعها 2 .
   ب- بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .
3. ليكن (Q) المستوى المعرف بالمعادلة : $2x+2y+z+3=0$.
   أ- بين أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدان .
   ب- بين أن المستوى (Q) والفلكة (S) يتقاطعان وفق دائرة $(\mathcal{C})$.
   جـ- أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على (Q) .
   د- حدد مركز وشعاع الدائرة $(\mathcal{C})$.

التمرين 11 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط :

$A\left(\frac{5}{2},0,0\right)$ و $B(0,5,0)$ و $C\left(0,0,\frac{5}{2}\right)$ و $\Omega\left(\frac{5}{8},\frac{5}{8},\frac{5}{8}\right)$.

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقط A و B و C .
2. أوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) العمودي على المستوى (P) و المار من النقطة Ω .
3. أ- أحسب : $\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|$.
   ب- ما هي مساحة رباعي الأوجه $(OABC)$ ؟
4. أحسب المسافة بين النقطة Ω و المستوى (P) .
5. لتكن (S) الفلكة ذات المعادلة :
   $$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{4}(x+y+z)+\frac{25}{32}=0$$
   أ- حدد شعاع ومركز الفلكة (S) .
   ب- بين أن الفلكة (S) مماسة لكل من المستويات : (ABC) و (OAB) و (OBC) و (OCA) .
6. حدد مثلوث إحداثيات نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (P) .

التمرين 12 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط :

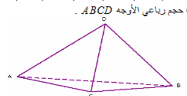
$A(1,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,2)$ و $\Omega\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ و O' المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC) .

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
2. أوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $(\Omega O')$.
3. حدد مثلوث إحداثيات النقطة O' .
4. نعتبر الفلكة S_λ التي مركزها Ω وشعاعها λ حيث λ عدد حقيقي موجب قطعا .
   أ- أعط معادلة ديكارتية للفلكة S_λ .
   ب- أوجد قيمة λ بحيث يكون المستوى (ABC) مماسا للفلكة S_λ .
   جـ- أوجد قيمة λ بحيث يكون تقاطع S_λ و (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين 13 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر رباعي الأوجه $ABCD$.

1. أذكر S : صيغة مساحة المثلث ABC .
2. تحقق من أن مسافة النقطة D عن المستوى (ABC) هي :
   $$d(D,(ABC))=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$$
3. استنتج أن حجم رباعي الأوجه $ABCD$ هو :
   $$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}\right|$$
4. نعتبر في $\mathcal{E}$ ؛ رباعي الأوجه $ABCD$ بحيث :
   $A(-1,-1,2)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(-1,2,1)$ و $D(1,1,1)$
   أحسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.



الحساب العددي

1) التناسبية؛ النسب المئوية؛ السلم

تمهيد :

نقول عن قياسين أنهما متناسبان عندما يمكننا الانتقال من الأول الى الثاني عن طريق الضرب في عدد ثابت يسمى معامل التناسب.فمثلا إذا كان ثمن التفاح في السوق هو 6 دراهم للكيلوغرام ، فهناك تناسب بين ثمن الشراء ووزن التفاح معامل التناسب هو 6 . أي $(6DH;1kg)$ .. $(18DH;3kg)$ ... $(9DH;1,5kg)$

أنشطة :

• اشترت إحسان سروالا و قميصا بما قدره $105DH$. إذا علمت أن ثمني السروال و القميص متناسبان على التوالي مع العددين 9 و 6 ، فاحسب ثمن كل منهما.

ليكن x ثمن السروال و y ثمن القميص. بما أن ثمني السروال و القميص متناسبين على التوالي مع 9 و 6 فإن : $\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{x+y}{15}=\frac{105}{15}=7$. من $\frac{x}{9}=7$ نستنتج أن $x=7\times 9=63$ و من $\frac{y}{6}=7$ نستنتج أن $y=7\times 6=42$

• ارتفع ثمن البنزين من $5,20DH$ الى $5,98$ للتر الواحد ، ما نسبة الزيادة ؟

ليكن t نسبة الزيادة ، لدينا : $5,98=5,20+\left(\frac{t}{100}\times 5,20\right)=5,20\left(1+\frac{t}{100}\right)$ أي $t=\left(\frac{5,98}{5,20}-1\right)\times 100=15$ إذن النسبة هي 15%.

• ثمن آلة حاسبة هو $150DH$. إذا علمت أن نسبة التخفيض 10% ، فاحسب ثمن الآلة الحاسبة بعد عملية التخفيض.

ليكن x ثمن الآلة الحاسبة بعد عملية التخفيض . لدينا :

$$\begin{aligned}x&=150-\frac{10}{100}\times 150\\&=150\left(1-\frac{10}{100}\right)\\&=150\times 0,9\\&=135\end{aligned}$$

قواعد :

1) نقول إن الأعداد غير المنعدمة a و b و c و d تكون في هذا الترتيب تناسبا إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

2) أ- نعبر عن الجملة التالية (الكمية y هي $t\%$ من الكمية x) ب $y=\frac{t}{100}x$

ب- إذا كان x هو الكمية و $t\%$ نسبة الزيادة فإن الكمية بعد عملية الزيادة هي : $x\left(1+\frac{t}{100}\right)$

ج- إذا كان x هو الكمية و $t\%$ نسبة التخفيض فإن الكمية بعد عملية التخفيض هي :

$x\left(1-\frac{t}{100}\right)$

أنشطة

• إذا علمت أن الطول الحقيقي لطريق سيار هو $200km$ فاحسب:

- طول هذه الطريق عل خريطة ذات السلم $\frac{1}{500}$

طول هذه الطريق على خريطة ذات السلم $\frac{1}{500}$ هو : $\frac{1}{500}\times 200=0,4km$

•مساحة شقة $99m^2$. حدد مساحة هذه الشقة على تصميم بسلم $\frac{1}{100}$ و على تصميم بسلم 2

على تصميم بسلم $\frac{1}{100}$ هي : $\left(\frac{1}{100}\right)^2\times 99=0,0099m^2$ تصغير

على تصميم بسلم 2 هي : $(2)^2\times 99=4\times 99=396m^2$ تكبير

2) المعادلات

تذكير

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$(x-2)(x+4)=0;x^2-3x^4=0;9x^2=81x$$
$$\frac{4x-6}{-x+5}=0;\frac{5}{x+3}=\frac{4}{7};\frac{x+1}{3x+4}=\frac{3}{2};\frac{5x-3}{x^2-2}=0$$

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}(x-2)(x+4)=0&\Leftrightarrow(x-2=0)ou(x+4=0)\\&\Leftrightarrow(x=2)ou(x=-4)\end{aligned}$$ أي $S=\{2;-4\}$

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}x^2-3x^4=0&\Leftrightarrow x^2\left(1-3x^2\right)=0\\&\Leftrightarrow x^2\left(1^2-\left(\sqrt{3}x\right)^2\right)=0\\&\Leftrightarrow x^2\left(1-\sqrt{3}x\right)\left(1+\sqrt{3}x\right)=0\\&\Leftrightarrow\left(x^2=0\right)ou\left(1-\sqrt{3}x=0\right)ou\left(1+\sqrt{3}x=0\right)\\&\Leftrightarrow(x=0)ou\left(x=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)ou\left(x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\end{aligned}$$ أي $S=\left\{0;-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

• $(E):\frac{4x-6}{-x+5}=0$

لتكن D مجموعة تعريف المعادلة (E) . لدينا :

$$\begin{aligned}D&=\{x\in\mathbb{R}/-x+5\neq 0\}\\&=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 5\}\\&=\mathbb{R}-\{5\}\end{aligned}$$

لكل x من $\mathbb{R}-\{5\}$ لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{4x-6}{-x+5}=0&\Leftrightarrow 4x-6=0\\&\Leftrightarrow x=\frac{6}{4}\\&\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}\end{aligned}$$ أي $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

نعتبر ثلاثيات الحدود التالية : $P(x)=x^2-3x+2$ و $Q(x)=2x^2-4x+2$ و $K(x)=x^2-2x+4$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات : $P(x)=0$ و $Q(x)=0$ و $K(x)=0$

2) ادرس إشارة ثلاثيات الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ ثم $L(x)$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات $p(x)\geq 0$ و $Q(x)\prec 0$ ثم $K(x)\succ 0$

1)• $P(x)=0$

نحسب مميز المعادلة $x^2-3x+2=0$. في هذا المثال $(a=1)$ ، $(b=-3)$ ، $(c=2)$

بما أن :

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(-3)^2-4\times 1\times 2\\&=9-8\\&=1\succ 0\end{aligned}$$ فإن للمعادلة حلين مختلفين هما :

$$\begin{aligned}x&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\&=\frac{3+1}{2}\\&=2\end{aligned}$$ أو $$\begin{aligned}x&=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\\&=\frac{3-1}{2}\\&=1\end{aligned}$$

إذن $S=\{1;2\}$

• $Q(x)=0$

نحسب مميز المعادلة $2x^2-4x+2=0$ في هذا المثال $(a=2)$ ، $(b=-4)$ ، $(c=2)$

بما ان :

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-ac\\&=(-4)^2-4\times 2\times 2\\&=0\end{aligned}$$ فإن للمعادلة حل مزدوج هو : $$\begin{aligned}x&=\frac{-b}{2a}\\&=\frac{4}{2\times 2}\\&=1\end{aligned}$$

إذن $S=\{1\}$

• $K(x)=0$

نحسب مميز المعادلة $x^2-2x+4=0$

بما أن : $$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(2)^2-4\times 1\times 4\\&=4-16\\&=-12\prec 0\end{aligned}$$ فإن المعادلة ليس لها حلا. أي $S=\{\ \}$

2)• $P(x)$

نعلم أن للثلاثية x^2-3x+2 جذرين مختلفين هما 1 و 2 .

الثلاثية تنعدم عند الجذرين ، لها إشارة العدد 1 خارج الجذرين و عكس إشارة العدد 1 داخل الجذرين

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	—	0	+	

• $Q(x)$

بما أن للثلا ثية $2x^2-4x+2$ جذر مزدوج أي $\Delta=0$ فإنها تنعدم عند الجذر 1 و إشارتها هي إشارة العدد 2

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2x^2-4x+2$		+	0	+	

• $K(x)$

بما أن مميز الثلاثية x^2-2x+4 سالب قطعا فإن إشارتها هي إشارة العدد 1 أي دائما موجبة قطعا.

3)• $p(x)\geq 0$

تبعا لجدول إشارة الثلاثية $P(x)$ فإن $S=]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$

• $Q(x)\prec 0$

تبعا لفقرة دراسة إشارة الثلاثية $Q(x)$ فإن $S=\{\ \}$

• $K(x)\succ 0$

تبعا لفقرة إشارة الثلاثية $K(x)$ فإن $S=\mathbb{R}$

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

نشاط

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية بطريقتين مختلفتين : $\begin{cases}2x+5y=1\\x+3y=4\end{cases}$

الطريقة التآلفية الخطية

$\begin{cases}2x+5y=1(\times 1)\\x+3y=4(\times -2)\end{cases}$

$+\begin{cases}2x+5y=1\\-2x-6y=-8\end{cases}$ ، $0x-y=-7\Rightarrow y=7$

$\begin{cases}2x+5y=1(\times 3)\\x+3y=4(\times -5)\end{cases}$

$+\begin{cases}6x+15y=3\\-5x-15y=-20\end{cases}$ ، $x+0y=-17\Rightarrow x=-17$

إذن $S=\{(-17;7)\}$

طريقة التعويض

$$\begin{cases}2x+5y=1\\x+3y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5y=1\\x=4-3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(4-3y)+5y=1\\x+3y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y=1-8\\x+3y=4\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}y=7\\x+3y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7\\x+21=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7\\x=-17\end{cases}\Rightarrow S=\{(-17;7)\}$$

طريقة المحددة

تعريف:

نعتبر نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين : $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$

-العدد $\Delta=\begin{vmatrix}a&b\\a'&b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S)

نضع $\Delta_x=\begin{vmatrix}c&b\\c'&b'\end{vmatrix}=cb'-c'b$ و $\Delta_y=\begin{vmatrix}a&c\\a'&c'\end{vmatrix}$

خاصية

نعتبر نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين : $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$

إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و لها حل وحيد (x,y) حيث $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ و $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$

• إذا كانت $\Delta=0$ و $\Delta_x=\Delta_y=0$ فإن للنظمة (S) ما لانهاية من الحلول حيث $S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/ax+by=c\}$

• إذا كانت $\Delta=0$ و ($\Delta_x\neq 0$ أو $\Delta_y\neq 0$) فإن $S=\{\ \}$

تمرين تطبيقي

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية:

$(S_1):\begin{cases}x-3y=1\\2x+8t=2\end{cases};(S_2):\begin{cases}x-3y=1\\2x-6y=2\end{cases};(S_3):\begin{cases}x-3y=1\\3x-9y=2\end{cases}$

دراسة الدوال وتمثيلها - الدالة المتخاطة

دراسة الدوال و تمثيلها باستعمال دوال مرجعية

1- دراسة و تمثيل مبيانيا الدالة $f : x \to ax^2$ حيث $a \neq 0$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = 2x^2$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}$

f دالة زوجية و منه اقتصار دراستها على $[0;+\infty[$

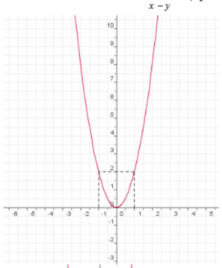
ليكن x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 2(x+y)$

لكل x و y من $[0;+\infty[$ حيث $x \neq y$: $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن f تزايدية على $[0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗



معادلة C_f هي $y = 2x^2$

C_f متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $0 \prec 2x^2 \prec 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

تحت المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

إذا كان $x \succ 1$ فان $2x^2 \succ 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

فوق المستقيم $(\Delta) : y = 2x$

جدول القيم

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

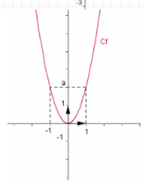
C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

* بالمثل أدرس الدالة f حيث $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$

ب- الحالة العامة

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f(x) = ax^2$ حيث $a \neq 0$

إذا كان $a \succ 0$ فان

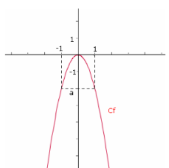


x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	0	↗

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	0	↘



C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأراتيب كمحور تماثل

تمرين $f(x) = x^2$ $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$h(x) = 3x^2$ $m(x) = -2x^2$

1- أعط جدول تغيرات f و g و h و m

2- في نفس المعلم المتعامد الممنظم أنشئ C_f و C_g و C_h و C_m

2- دراسة الدالة $x \to ax^2 + bx + c$

لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين و $\vec{u}(\alpha;\beta)$ متجهة في مستوى منسوب الى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

و t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

$t(M) = M'$ تكافئ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ تكافئ $\begin{cases} X - \alpha = x \\ Y - \beta = y \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} X = x + \alpha \\ Y = y + \beta \end{cases}$

مثال1 لندرس f حيث $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y = 2(x-1)^2 - 5$ أي $y + 5 = 2(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;-5)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to 2x^2$

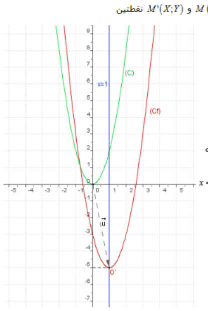
لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M) = M'$ تكافئ $\begin{cases} X - 1 = x \\ Y + 5 = y \end{cases}$

$M(x;y) \in (C)$ تكافئ $y = 2x^2$

تكافئ $Y + 5 = 2(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y) \in (C_f)$



إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه $t(O) = O'$

أي $O'(1;-5)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x = 1$

و حيث أن الدالة $x \to 2x^2$ تزايدية على $[0;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تزايدية على $[1;+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty;1]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-5	↗

إنشاء المنحنى

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-5	-3	3

مثال2 لندرس f حيث $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x) = -(x-1)^2 + 4$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y = -(x-1)^2 + 4$ أي $y - 4 = -(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;4)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to -x^2$

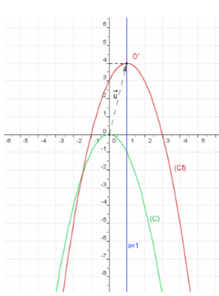
لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M) = M'$ تكافئ $\begin{cases} X - 1 = x \\ Y - 4 = y \end{cases}$

$M(x;y) \in (C)$ تكافئ $y = -x^2$

تكافئ $Y - 4 = -(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y) \in (C_f)$



إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور تماثله محور الاراتيب فان (C_f) شلجم رأسه $t(O) = O'$ أي $O'(1;4)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x = 1$

و حيث أن الدالة $x \to -x^2$ تناقصية على $[0;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;0]$ فان الدالة f تناقصية على $[1;+\infty[$ و تزايدية على $]-\infty;1]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↗	4	↘

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$ تكافئ $x = -1$ أو $x = 3$

x	0	1	2	4
$f(x)$	3	4	3	-5

الحالة العامة $x \to ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

نشاط

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$

1/ أعط الشكل القانوني لـ f

2/ بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to ax^2$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ و استنتج طبيعة (C_f)

ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد a

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$

* $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha = \frac{-b}{2a}$ و $\beta = f(\alpha)$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

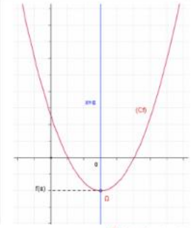
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \to ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha;\beta)$ و محور تماثله المستقيم ذا $x = \alpha$

نضع $\alpha = \frac{-b}{2a}$

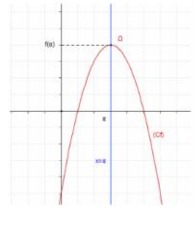
*- إذا كان $a \succ 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↘	$f(\alpha)$	↗



* إذا كان $a \prec 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↗	$f(\alpha)$	↘



3- دراسة الدالة $x \to \frac{a}{x}$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$

- ندرس تغيرات f

$D_f = \mathbb{R}^*$

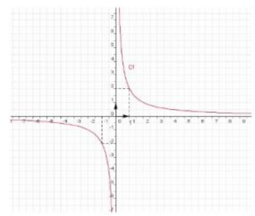
f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x \neq y$ $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{-2}{xy}$

لكل x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x \neq y$ $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$

إذن f تناقصية على $]0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘



ملاحظة

إذا كان $0 \prec x \prec 1$ فان $\frac{2}{x} \succ 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0;1[$

فوق المستقيم $(\Delta) : y = 2$

إذا كان $x \geq 1$ فان $0 \prec \frac{2}{x} \leq 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1;+\infty[$

تحت المستقيم $(\Delta) : y = 2$

جدول القيم

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	2

C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

* نعتبر الدالة $f(x) = \frac{-1}{x}$

- ندرس تغيرات f

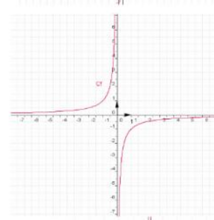
$D_f = \mathbb{R}^*$

f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0;+\infty[$

ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x \neq y$

$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1}{xy}$

إذن f تزايدية على $]0;+\infty[$



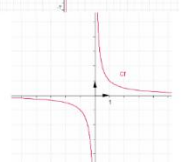
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗

C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

ب- الحالة العامة

نعتبر $f(x) = \frac{a}{x}$

إذا كان $a \succ 0$ فان

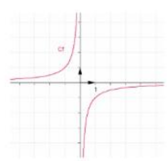


x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘

C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

إذا كان $a \prec 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗



C_f هدلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

4- دراسة الدالة $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

مثال 1 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

*- $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن $f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y = 2 + \frac{3}{x-1}$ أي $y - 2 = \frac{3}{x-1}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \to \frac{3}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M) = M'$ تكافئ $\begin{cases} X - 1 = x \\ Y - 2 = y \end{cases}$

$M(x;y) \in (C)$ تكافئ $y = \frac{3}{x}$ تكافئ $Y - 2 = \frac{3}{X-1}$ تكافئ $M'(X;Y) \in (C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه $t(O) = O'$ أي $O'(1;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x = 1$ و $y = 2$

و حيث أن الدالة $x \to \frac{3}{x}$ تناقصية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

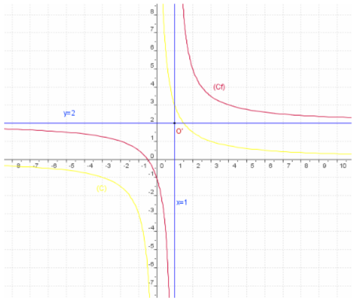
جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	‖	↘

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$ تكافئ $x = -\frac{1}{2}$

x	0	1	2	5
$f(x)$	-1	//	5	$\frac{11}{4}$



مثال 2 $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$

*- $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

*- بإنجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

$f(x)=2+\frac{-1}{x+2}$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ هي $y=2+\frac{-1}{x+2}$ أي $y-2=\frac{-1}{x+2}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x\to\frac{-1}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$t(M)=M'$ تكافئ $\begin{cases}X+2=x\\Y-2=y\end{cases}$

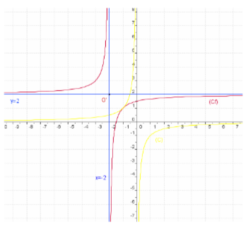
$M(x;y)\in(C)$ تكافئ $y=\frac{3}{x}$ تكافئ $Y-2=\frac{-1}{X+2}$ تكافئ $M'(X;Y)\in(C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارباه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه

$t(O)=O'$ أي $O'(-2;2)$ و مقارباه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=-2$ و $y=2$

و حيث أن الدالة $x\to\frac{-1}{x}$ تزايدية على كل من $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ فان الدالة f تزايدية على كل من $]-\infty;-2[$ و $]-\infty;-2]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f	↗	||	↗

إنشاء المنحنى

$f(x)=0$ تكافئ $x=-\frac{3}{2}$

x	-3	-2	-1	0	2
$f(x)$	1	//	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

الحالة العامة $x\to\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$

نشاط

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

1- حدد α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

2- بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

و استنتج طبيعة (C_f)

3- بين أن تغيرات f مرتبطة بالعدد $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$ ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}$

خاصيات

لتكن f الدالة المتخاطة المعرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ بـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x)=\beta+\frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x\to\frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha;\beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هدلول مركزه $\Omega(\alpha;\beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعرفان بـ $x=\alpha$ و $y=\beta$

ملاحظة: $\alpha=\frac{-d}{c}$ و $\beta=\frac{a}{c}$

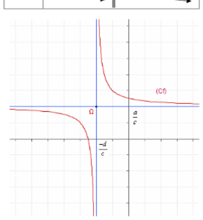
---

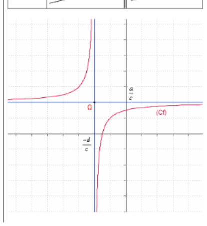
*- إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\succ 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↗	||	↗

*- إذا كان $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\prec 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	↘	||	↘





5- دالة الجيب sin - دالة جيب التمام cos

أ/ دالة الجيب sin

تعريف

الدالة sinus هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$
نكتب $\sin : x\to\sin x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin(-x)=-\sin x$ نقول ان الدالة sin فردية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\sin x=\sin(x+2k\pi)$

ومنه $\sin x=\sin(x+2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin x=\sin(x+2\pi)$ نقول ان الدالة sin دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و حيث $\sin x=\sin(x+2k\pi)$ فان $M'(x+2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و بالتالي $\overline{MM'}=2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

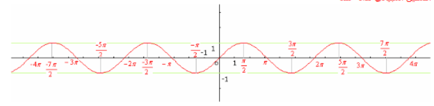
و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى على مجال سعته 2π مثلا $[-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات $[-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

sin فردية و منه المنحنى متماثل بالنسبة لأصل المعلم

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\sin})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\sin})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة sin



ب/ دالة جيب التمام cos

تعريف

الدالة cossinus هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$
نكتب $\cos : x\to\cos x$

خاصية1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos(-x)=\cos x$ نقول إن الدالة cos زوجية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\cos x=\cos(x+2k\pi)$

ومنه $\cos x=\cos(x+2\pi)$

خاصية2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos x=\cos(x+2\pi)$ نقول إن الدالة cos دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن $M(x;\cos x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و حيث $\cos x=\cos(x+2k\pi)$ فان $M'(x+2k\pi;\sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و بالتالي $\overline{MM'}=2k\pi\vec{i}$ أي M' صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

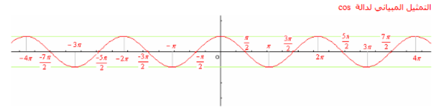
و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى $(C_{\cos})$ على مجال سعته 2π مثلا $[-\pi;\pi]$ و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات $[-\pi+2k\pi;\pi+2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

cos زوجية و منه المنحنى $(C_{\cos})$ متماثل بالنسبة لمحو الاراتيب

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\cos})$ على $[0;\pi]$ و استنتاج المنحنى $(C_{\cos})$ عل $[-\pi;0]$

التمثيل المبياني لدالة cos



تمارين و حلول

تمرين1

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث $g(x)=\frac{-2x-1}{-2x+1}$; $f(x)=x^2-2x$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة g

2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

3- أ) أنقل الجدول التالي و أتممه

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$					
$g(x)$					

ب) حدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

ج) أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

الجواب

$g(x)=\frac{-2x-1}{-2x+1}$; $f(x)=x^2-2x$

1 - نحدد مجموعة تعريف الدالة g

ليكن $x\in\mathbb{R}$ $-2x+1\neq 0$ تكافئ $x\neq\frac{1}{2}$ إذن $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2 - نعطي جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

جدول تغيرات f $a=1$ $\frac{-b}{2a}=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘	-1	↗

جدول تغيرات g لدينا $\begin{vmatrix}-2&-1\\-2&1\end{vmatrix}=-4$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g	↘	|	↘

3- أ - نتمم الجدول

x	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

ب) نحدد تقاطع C_f و محور الافاصيل

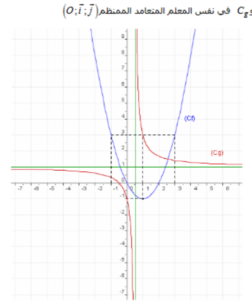
ليكن $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x=0$

$\Leftrightarrow x=0\quad ou\quad x=2$

إذن C_f يقطع محو الافاصيل في النقطتين ذات الافصولين 0 و 2 على التوالي

ج) إنشاء المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$



تمرين2

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ $g(x)=x^2-3|x|$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

2- أعط جدول تغيرات f

3- أ- أدرس زوجية g

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- أعط جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

4- حدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

5 - أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=g(x)$

ج – حل مبيانيا المتراجحة $x^2-3|x|\geq 0$

الجواب

$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ $g(x)=x^2-3|x|$

2- أ- نحدد D_f

لتكن $x \in \mathbb{R}$
$x \in D_f$ تكافئ $x-1 \neq 0$
تكافئ $x \neq 1$
إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(4)$

$$f(2) = \frac{4-1}{2-1} = 3 \quad ; \quad g(2) = 4-6 = -2 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad g(4) = 16-12 = 4$$

2- نحدد تغيرات f

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ ومنه f تناقصية على كل من $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

3- أ- ندرس زوجية g
لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$
$$g(-x) = (-x)^2 - 3|-x| = x^2 - 3|x| = g(x)$$
g دالة زوجية

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

لدينا $g(x) = x^2 - 3x$ لكل x من $[0;+\infty[$

$a=1 \quad b=-3 \quad c=0 \qquad \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$

معامل x^2 هو العدد الموجب 1 و منه الدالة $x \to x^2 - 3x$ تزايدية $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$

اذن g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

د- نعطي جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

لدينا g تناقصية على $\left[0;\frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و حيث أن g زوجية فان g تزايدية على $\left]-\frac{3}{2};0\right[$ و تناقصية على $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g		↘	$\frac{9}{4}$	↗	0	↘	$\frac{9}{4}$	↗	

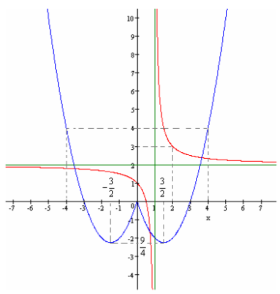
4- نحدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

بما أن g زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع C_g و محور الأفاصيل على $\mathbb{R}^+$ و استنتاج التقاطع على $\mathbb{R}^-$

ليكن $x \in \mathbb{R}^+$: $g(x) = 0$ تكافئ $x^2 - 3x = 0$
تكافئ $x = 0$ أو $x = 3$

إذن C_g و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و 3- على التوالي

5 - أ- ننشئ C_f و C_g



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$
من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g يتقاطعان في ثلاث نقط
ومنه للمعادلة $f(x) = g(x)$ ثلاثة حلول

ج – نحل مبيانيا المتراجحة $x^2 - 3|x| \geq 0$
$x^2 - 3|x| \geq 0$ تكافئ $g(x) \geq 0$ تكافئ C_g فوق محور الأفاصيل
من خلال التمثيل المبياني يتضح أن C_g فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في $\{0\} \cup]3;+\infty[\cup]-\infty;-3[$
إذن $S =]-\infty;-3] \cup [3;+\infty[\cup \{0\}$

تمرين3

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$f(x) = x^2 - x \qquad g(x) = \frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

3- أ- حدد D_g

ب- أحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

2- أ- أعط جدول تغيرات f
ب- حدد طبيعته المنحنى C_f
3- أ- بين أن g دالة زوجية
ب- حدد تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

4- أ- أنشئ C_f و C_g
ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

الجواب

$$f(x) = x^2 - x \qquad g(x) = \frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

4- أ- نحدد D_g
ليكن $x \in \mathbb{R}$
$x \in D_g$ تكافئ $|x|-1 \neq 0$
تكافئ $|x| \neq 1$
تكافئ $x \neq 1$ و $x \neq -1$
إذن $D_g = \mathbb{R} - \{1;-1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \quad ; \quad g(2) = \frac{2\times 2-1}{2-1} = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4} \quad ; \quad g(0) = \frac{2\times 0-1}{0-1} = 1 \quad ; \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\times\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}-1} = 0$$

2- أ- نعطي جدول تغيرات f
لدينا $f(x) = x^2 - x$ أي $a = 1$ و $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$
ومنه جدول تغيرات f

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		↘	$\frac{-1}{4}$	↗	

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f
C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ و محور تماثلة المستقيم ذا المعادلة $x = \frac{1}{2}$

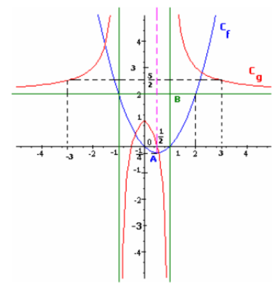
3- أ- نبين أن g دالة زوجية
لكل $x \in \mathbb{R} - \{1;-1\}$ لدينا $-x \in \mathbb{R} - \{1;-1\}$
ليكن $x \in \mathbb{R} - \{1;-1\}$
$$g(-x) = \frac{2|-x|-1}{|-x|-1} = \frac{2|x|-1}{|x|-1} = g(x)$$
إذن g دالة زوجية

ب- نحدد تغيرات g و نعطي جدول تغيراتها
لكل x من $]1;+\infty[\cup [0;1[$: $|x| = x$ ومنه $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$
و حيث $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \prec 0$ فان g تناقصية على كل من $]1;+\infty[$ و $[0;1[$
و بما أن g دالة زوجية فان g تزايدية على كل من $]-\infty;-1[$ و $]-1;0]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g		↗	‖	↗	1	↘	‖	↘	

4- أ- ننشئ C_f و C_g
بما أن g زوجية فان C_g متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب
جزئ منحنى C_g على $]1;+\infty[\cup [0;1[$ هو جزئ من هذلول مركزه $B(1;2)$ ومقارباه
$(\Delta_2): x = 1 \quad (\Delta_1): y = 2$
C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$
من خلا ل التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g
يتقاطعان في أربع نقط
ومنه المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل أربعة حلول